Matemática Discreta y Álgebra - Curso 2020/21. ESP. EUCLIDEOS

1. Aplicar el método de Gram-Schmidt a la base de $\mathbb{R}^3$

$$\{(1,2,0),(1,0,0),(2,3,-1)\}$$

para hallar una base ortonormal respecto al producto escalar estándar de $\mathbb{R}^3$.

2. Aplicar el método de Gram-Schmidt a la base de $\mathbb{R}^4$

$$\{(1,2,1,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$$

para hallar una base ortonormal respecto al producto escalar estándar de $\mathbb{R}^4$.

3. Consideremos el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar

$$(x_1,x_2,x_3)\cdot(y_1,y_2,y_3) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

Demuestra que es un producto escalar.

4. Consideremos el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual y los vectores de $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1,1,-1),\ v_2 = (1,1,2),\ v_3 = (1,1,0).$$

Calcula qué ángulo forman entre sí los vectores v_1 y v_2, los vectores v_2 y v_3, y comprueba la desigualdad de Cauchy-Schwartz usando los vectores v_1 y v_3.

5. Consideremos el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual y los vectores de $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (1,1,2),\ v_3 = (1,1,0).$$

Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por v_1, v_2, v_3. Calcula la proyección ortogonal del vector $w = (1,0,0)$ sobre S.

6. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar habitual, calcula la proyección ortogonal del vector $v = (1,3,-1,4)$ sobre el subespacio generado por $\{(2,1,0,1),(0,3,1,1)\}$.

7. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar habitual, calcula la proyección ortogonal del vector $v = (1,0,0,2)$ sobre el subespacio

$$S = \{(x,y,z,t) \mid \left\{ \begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x+2y=0 \end{array} \right. \}$$

8. Calcula soluciones aproximadas por mínimos cuadrados de los siguientes sistemas lineales $Ax = b$ y halla el error cometido al tomar la solución aproximada.

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

9. Un cierto experimento produce los datos empíricos (x_i, y_i) siguientes: (1,1.8), (2,2.7), (3,3.4) y (4,4.38). Si los resultados deben corresponder a una función de la forma $y = a_1 + a_2 x$, calcular por mínimos cuadrados la función de esa familia que mejor ajusta a los datos empíricos.